

Superando mitos en el cálculo de circuitos

En la enseñanza habitual de la electrotecnia y la teoría de circuitos lineales, existe una regla casi universalmente aceptada: el análisis de mallas se restringe a circuitos planos, y se debe recurrir al análisis nodal cuando la red presenta cruces no planares. Este artículo busca derribar ese mito.

Michael Stanimirov
Lisbeth Sandoval-Soto
Universidad Tecnológica de Panamá
stanimirov.michael@icloud.com

La costumbre de limitar el análisis de mallas a circuitos planos no proviene de una imposibilidad física de las leyes de Kirchhoff, sino de una simplificación metodológica: el uso exclusivo de las denominadas “mallas de ventana” (*window meshes*), asignando sistemáticamente signos negativos a los términos mutuos de la matriz de resistencias por analogía con la matriz de conductancias nodales. Cuando la geometría de la red abandona el plano y se vuelve tridimensional, esta regla mecánica falla si no se respetan rigurosamente las orientaciones espaciales de las corrientes de rama.

Se ha discutido extensamente la complejidad y el rechazo que genera en los estudiantes el formalismo del método de mallas tradicional,

En foros y congresos recientes se ha discutido extensamente la complejidad y el rechazo que genera en los estudiantes el formalismo del método de mallas tradicional, y en su lugar se proponen artificios didácticos como “mallas de referencia” exteriores o inversiones geométricas. Sin embargo, desde nuestra perspectiva, estas soluciones intermedias no resuelven la raíz del problema conceptual.

Este trabajo expone cómo, recurriendo al álgebra topológica introducida en la física por Hermann Weyl en 1927 y al lema de inversión matricial de Frobenius y Schur (ampliamente conocido en la literatura anglosajona como “identidad de Wooldbury”), es posible formalizar un teorema de redes que establece una transformación analítica directa entre la matriz de conductancias nodales (G_N) y la matriz de resistencias de malla (R_M) a través de sus inversas. Esta formulación no solo demuestra la plena aplicabilidad y simetría del análisis de malla en circuitos no planos (tridimensionales), sino que unifica formalmente las ecuaciones deducidas por conservación de la carga y por conservación de la energía.

Para mayor detalle analítico, el lector interesado puede descargar [aquí](#) el trabajo original de los autores.

URL estable: <https://www.editores.com.ar/node/8628>

Demuestra la plena aplicabilidad y simetría del análisis de malla en circuitos no planos (tridimensionales), sino que unifica formalmente las ecuaciones deducidas por conservación de la carga y por conservación de la energía

Fundamentos: álgebra topológica y ramas generales

Para sistematizar el cálculo en cualquier estructura, cada elemento del circuito se modela bajo el concepto de "rama general" (una resistencia en serie con una fuente de tensión y en paralelo con una fuente de corriente) bajo la convención de receptor/consumidor:

$$(1) V_x = V(R_x) - V(S_x)$$

$$(2) I_x = I(R_x) - I(S_x)$$

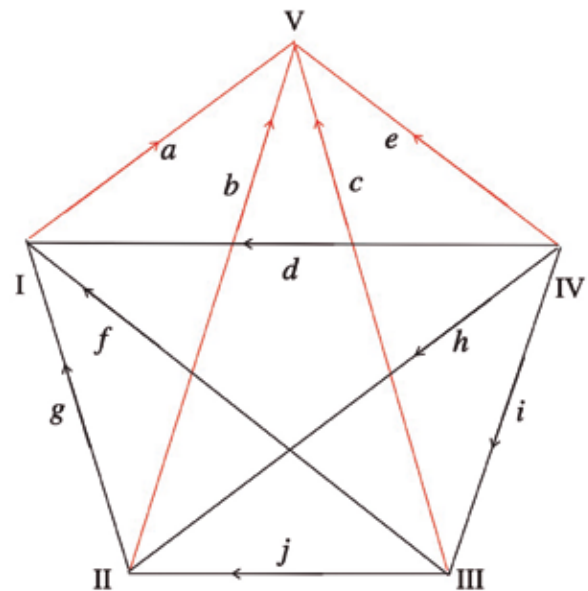
$$(3) V(R_x) = R_x I(R_x) \leftrightarrow I(R_x) = G_x V(R_x)$$

A partir del grafo de la red, se selecciona un árbol completo (*tree*, subíndice *tr*) que conecta todos los nodos sin cerrar lazos, y el conjunto complementario de ramas de conexión (*cotree*, subíndice *ctr*):

- » La cantidad de ramas del árbol define la cantidad de nodos independientes.
- » La cantidad de ramas de conexión define la cantidad de mallas independientes.

Apoyándose en el álgebra topológica introducida en la física por Hermann Weyl (1927), se definen las matrices de incidencia fundamentales:

- » Matriz de incidencia de corrientes: $A_{brf} = [ES_f]$
- » Matriz de incidencia de tensiones: $B_{brf} = [M_f E]$



Circuito con las ramas del árbol (rojo: a, b, c, e) y las ramas de conexión (negro: d, f, g, h, j, i)

Se cumple rigurosamente la relación de ortogonalidad fundamental $M_f = -S_{f \wedge T}$

A partir de estas relaciones, se construyen la matriz de conductancia nodal G_N y la matriz de resistencia de malla R_M :

$$(4) G_N = G_{tr} + S_f G_{ctr} S_{f \wedge T}$$

$$(5) R_M = R_{ctr} + M_f R_{tr} M_{f \wedge T}$$

Ambas matrices presentan una estructura formal idéntica.

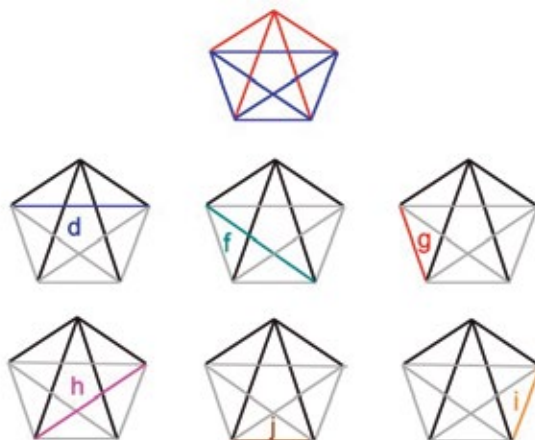
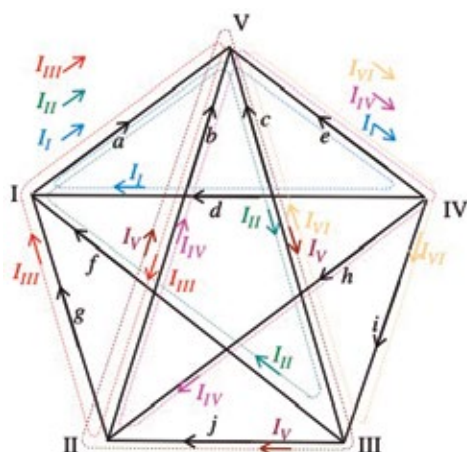


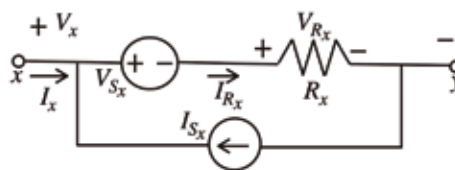
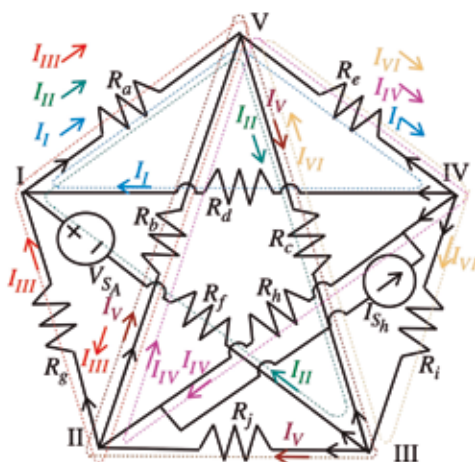
Ilustración de la formación de mallas basada en las ramas de conexión (d, f, g, h, j, i), que cierran una malla a través de las ramas del árbol (a, b, c, e).

El teorema de redes: el puente entre mallas y nodos

Utilizando la identidad matricial de Frobenius y Schur (conocida comúnmente en la literatura anglosajona como “fórmula de Woodbury”), las inversas de la matriz de conductancia nodal $G_{N \times 1}$ y de la matriz de resistencia de malla $R_{M \times 1}$ pueden convertirse de forma directa la una en la otra:

$$(6) R_{M \times 1} = G_{ctr} - G_{ctr} S_{f \wedge T} G_{N \times 1} S_f G_{ctr}$$

$$(7) G_{N \times 1} = R_{tr} - R_{tr} M_{f \wedge T} R_{M \times 1} M_f R_{tr}$$



Circuito preparado topológicamente con direcciones de voltajes y corrientes para el análisis de malla y análisis nodal, así como interconexión de la rama general.

¿Qué implica esto en la práctica?

- » Interconvertibilidad de leyes de conservación: el análisis nodal se basa en la conservación de la carga y el de mallas en la conservación de la energía; el teorema permite transformar matemáticamente sistemas de conservación de carga en sistemas de conservación de energía y viceversa.
- » Cálculo cruzado: es posible calcular las corrientes de malla I_M utilizando exclusivamente matrices y vectores provenientes del análisis nodal, o determinar las tensiones de nodo V_N a partir de los operadores del análisis de malla.
- » Matrices no fundamentales: si se parte de matrices de incidencia arbitrarias (no fundamentales), estas pueden reducirse algebraicamente a las submatrices S_f y M_f mediante partición e inversión de bloques.

Cálculo cruzado: es posible calcular las corrientes de malla I_M utilizando exclusivamente matrices y vectores provenientes del análisis nodal

Demostración práctica: el grafo no-plano K_5 de Kuratowski

Para comprobar la universalidad del teorema, se implementó un caso numérico sobre uno de los grafos no planos más representativos: el grafo completo K_5 de Kuratowski (cinco nodos interconectados todos entre sí y diez ramas con resistencias de 1 a 10 Ω , junto con fuentes de tensión y corriente).

Se resuelve mediante GNU Octave con precisión de doble punto flotante:

- » Se evaluaron las corrientes y tensiones de todas las ramas mediante el método nodal directo, el método de mallas directo y las conversiones cruzadas mediante el teorema propuesto.

- » Los resultados coincidieron exactamente en todos los métodos.
- » La consistencia física del cálculo se validó mediante el teorema de balance de potencias de Weyl (potencia total nula), arrojando residuos del orden de 10^{-15} a $10^{-16}W$.
- » La discrepancia numérica entre el cálculo directo de las inversas y la deducción indirecta a través del teorema se ubicó en el rango de $\pm 10^{-15}$ a $\pm 10^{-18}$.

Extensión y aplicaciones en la ingeniería actual

El alcance de este desarrollo no se limita a redes puramente resistivas de corriente continua:

- » Régimen permanente senoidal (AC): las matrices de resistencia y conductancia se generalizan sustituyéndolas por matrices de impedancia $Z(j\omega)$ y admitancia $Y(j\omega)$ en el plano complejo.
- » Procesos dinámicos y transitorios: mediante la transformada de Laplace, los operadores admiten expresiones operacionales $Z(s)$ e $Y(s)$.
- » Sistemas acoplados multifísicos: la formulación matemática es directamente extrapolable a balances de cantidad de movimiento, masa y energía acoplados (redes hidráulicas, térmicas o de transporte).

Impacto en el diseño y operación de redes

En aplicaciones de tiempo real —como los algoritmos de protección digital en redes eléctricas inteligentes (*Smart Grids*), estimadores de estado, filtros de Kalman y biosensores 3D—, la dimensión del sistema puede demandar un costo computacional crítico o presentar matrices mal condicionadas.

Este teorema brinda al ingeniero y desarrollador la libertad analítica de formular y optimizar el problema en el dominio numéricamente más estable o computacionalmente más ligero (malla

o nodo), disponiendo de un puente exacto e instantáneo para obtener las variables del otro dominio sin pérdidas de información ni restricciones topológicas.

Este teorema brinda al ingeniero y desarrollador la libertad analítica de formular y optimizar el problema en el dominio numéricamente más estable o computacionalmente más ligero

Consideraciones históricas y de rigor en la literatura técnica

Un aspecto de notable valor conceptual que acompaña esta demostración es el rescate de las fuentes matemáticas originales, muchas veces eclipsadas por la bibliografía técnica estandarizada:

- » Hermann Weyl (1927) introdujo tempranamente la topología combinatoria y el cálculo matricial en las redes de conducción, anticipando en varias décadas formulaciones de balance de potencias que la literatura posterior atribuyó con frecuencia a otros autores.
- » Hans Ferdinand Mayer (1926) publicó en Alemania el circuito equivalente en paralelo con fuente de corriente y conductancia, trabajo que en gran parte de la literatura técnica occidental se conoce exclusivamente como el “teorema de Norton” (quien lo formuló internamente en Bell Labs en 1927).
- » Ferdinand Georg Frobenius (1912) e Issai Schur (1918) desarrollaron los complementos matriciales y el lema de inversión que sentaron las bases de las operaciones de bloques que hoy se denominan “fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury”.

Conclusiones y perspectiva editorial

Desde el punto de vista del desarrollo de software de simulación industrial masiva (como el método MNA en herramientas tipo SPICE), el análisis nodal continúa siendo el estándar predominante debido a la dispersión matricial y la facilidad de implementación algorítmica.

Sin embargo, en el terreno de la teoría fundamental de circuitos y la didáctica avanzada, la derivación presentada por los autores aporta dos clarificaciones de alto valor:

- » Superación del dogma de la no-planaridad: demuestra rigurosamente que el análisis de mallas es plenamente aplicable a circuitos tridimensionales o no planos, siempre que se formule bajo el concepto de mallas fundamentales del árbol y no mediante la inspección simplista de “mallas ventana”.
- » Cierre analítico de la dualidad: establece un puente explícito entre las matrices de conservación de energía y conservación de carga, brindando una herramienta conceptual elegante para la enseñanza de la teoría general de redes eléctricas y grafos. ■■